Chapitre 21 : Séries numériques

Séries usuelles

Exercice 1: Déterminer la nature des séries suivantes, ainsi que leur somme en cas de convergence.

1. $\sum \frac{1}{4^n}$
2. $\sum \mathbf{e}^{-n}$
3. $\sum \frac{3^{n-1}}{5^{n+1}}$
4. $\sum \mathbf{e}^{2n}$
5. $\sum \frac{2^n}{n!}$
6. $\sum \frac{(n+1)3^n}{n!}$

Exercice 2: On s'intéresse aux suites (u_n) et (w_n) telles que $u_0 = 0$, $w_0 = 1$, $w_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 1$, et $w_{n+2} = 4w_{n+1} - 4w_n$.

1. Déterminer les termes généraux en fonction de n.
2. Déterminer l'expression des sommes partielles d'indice n notées U_n et W_n.
3. En déduire la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum w_n$.

Exercice 3:

1. Soit $k \geqslant 1$. Calculer $\int_0^1 t^{k-1} dt$.
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2) - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t$.
3. En déduire que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente et déterminer sa somme.

Exercice 4: On se propose de calculer la somme de la série $\sum \frac{1}{(3n)!}$.

1. Montrer que les séries $\sum \frac{1}{n!}$, $\sum \frac{j^n}{n!}$ et $\sum \frac{j^{2n}}{n!}$ convergent et déterminer leur somme. *On rappelle que* $j = \mathbf{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $a_n = \frac{1}{3}\left(1 + j^n + j^{2n}\right)$. Expliciter a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Conclure en étudiant la série $\sum \frac{a_n}{n!}$.

Nature de séries

Exercice 5: Déterminer un équivalent de (u_n) puis déterminer la nature de la série $\sum u_n$ dans les cas suivants.

1. $u_n = \frac{n}{n^2+1}$
2. $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$
3. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
4. $u_n = \frac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{ch}(2n)}$

Exercice 6: Démontrer les égalités suivantes et en déduire la nature des séries de termes généraux associées.

1. $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$
2. $\left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}} \sim \frac{1}{n}$.
3. $\frac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Exercice 7: Déterminer la nature des séries suivantes.

1. $\sum \frac{n+1}{n^2+1}$
2. $\sum \frac{\ln(n)}{n}$
3. $\sum \sin\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$
4. $\sum \frac{1}{n^2 3^n}$
5. $\sum \sqrt{\mathrm{ch}\left(\frac{1}{n}\right) - 1}$
6. $\sum \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+1)!}$

Exercice 8: Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$.

1. Montrer que $u_n \sim v_n$.
2. Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente. Est-elle absolument convergente ?
3. Montrer que la série $\sum v_n$ diverge.

Comparaison avec une intégrale

Exercice 9: *Développement asymptotique de la série harmonique.*
On considère la série $\sum \frac{1}{n}$, dont on note H_n la somme partielle d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $H_n \sim \ln(n)$.
2. On note $u_n = H_n - \ln(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   En étudiant la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$, montrer que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 10: *Série de Bertrand.*
On s'intéresse à la série $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$.

1. Déterminer la monotonie de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ définie sur $]1, +\infty[$.
2. Soit $k \in [\![2, +\infty[\![$. Minorer par une intégrale la quantité $\frac{1}{k\ln(k)}$.
3. En déduire la nature de la série $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$.

Exercice 11: *Fonction Zêta de Riemann.*
On pose $\zeta : a \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$

1. Justifier que la fonction ζ est bien définie sur $]1, +\infty[$.
2. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, encadrer $\zeta(a)$ pour tout $a \in]1, +\infty[$.
3. En déduire un équivalent simple de ζ en 1^+.
4. Déterminer la limite, si elle existe, de ζ en $+\infty$.
5. Tracer la courbe de la fonction ζ.

Exercice 12:
Déterminer un équivalent de la suite des restes de la série $\sum \frac{1}{n^2}$.

Calcul de sommes via une décomposition en éléments simples

Exercice 13: Déterminer la nature des séries suivantes puis la valeur de leur somme.

1. $\sum \frac{n}{(n+1)!}$
2. $\sum \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$
3. $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
4. $\sum \frac{1}{n^2(n+1)^2}$

Exercice 14: On s'intéresse à la série $\sum \frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos(\frac{1}{n})\cos(\frac{1}{n+1})}$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, développer $\frac{\sin\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)}{\cos(\frac{1}{k})\cos(\frac{1}{k+1})}$.
   On pourra décomposer $\frac{1}{k(k+1)}$ *en éléments simples.*
2. En déduire que la série est convergente et déterminer sa somme.

Application à l'étude de suites récurrentes

Exercice 15:
On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+ \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \dfrac{\mathrm{e}^{-u_n}}{n+1} \end{cases}$

1. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer la limite de la suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = n\,u_n$.
3. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 16:
On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que (u_n) est bien définie et déterminer sa monotonie.
2. En considérant $u_{n+1}^2 - u_n^2$, montrer que $u_n \geqslant \sqrt{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   En déduire le comportement asymptotique de (u_n).
3. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k^2} \underset{n\to+\infty}{=} O(\ln(n))$
4. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{2n} + O\left(\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\right)$.